Fonction Gamma

Leçons concernées : 207 235 239 241 245 265

Proposition 1. *Soit $P = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}(z) > 0\}$. On définit sur P la fonction holomorphe :*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$$

Démonstration.

On pose $f(z,t) = e^{-t}t^{z-1}$. On va appliquer le théorème d'holomorphie des intégrales à paramètres. La fonction $z \mapsto f(z,t)$ est holomorphe, et la fonction $t \mapsto f(z,t)$ est mesurable. Soit $K \subset P$ un compact. Il existe δ_1 et δ_2 tels que, pour tout $z \in K$, $0 < \delta_1 < \mathrm{Re}\, z < \delta_2 < +\infty$. Alors :

$$|e^{-t}t^{z-1}| \leqslant \begin{cases} t^{\delta_1 - 1} & \text{si} \quad 0 < t \leqslant 1 \\ e^{-t}t^{\delta_2 - 1} & \text{si} \quad t > 1 \end{cases}$$

Or $(t \mapsto t^{\delta_1 - 1}) \in L^1([0,1])$ et $(t \mapsto e^{-t}t^{\delta_2 - 1}) \in L^1([1, +\infty[)$, on en conclut que Γ est holomorphe sur P. □

Proposition 2. Γ *se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, dont l'ensemble des pôles est $\mathbb{Z}^{\leqslant 0}$.*

Démonstration.

On écrit :

$$\Gamma(z) = \underbrace{\int_0^1 e^{-t}t^{z-1}dt}_{f(z)} + \underbrace{\int_1^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}dt}_{g(z)}$$

Comme $e^{-t} = \sum_{n \geqslant 0} \frac{(-1)^n t^n}{n!}$, alors $e^{-t+z-1} = \sum_{n \geqslant 0} \frac{(-1)^n t^{n+z-1}}{n!}$. On en déduit :

$$|e^{-t+z-1}| \leqslant \sum_{n \geqslant 0} \left| \frac{(-1)^n t^{n+z-1}}{n!} \right| = \sum_{n \geqslant 0} \frac{t^{n + \mathrm{Re}\, z - 1}}{n!} = e^t t^{\mathrm{Re}\, z - 1} \in L^1([0,1])$$

Donc, par Fubini :

$$f(z) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 t^{n+z-1} dt = \sum_{n \geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)}$$

On pose $f_n(z) = \frac{(-1)^n}{n!(z+n)}$, qui a pour pôle $-n$. Soit K un compact de $\mathbb{C}$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $K \subset \overline{D(0,N)}$, et pour tout $n \geqslant N$, f_n n'a pas de pôle dans K. Comme $|z+n| \geqslant n - |z| > n - N$, on a $|f_n(z)| \leqslant \frac{1}{n!(n+N)}$. De plus, $\sum \frac{1}{n!(n+N)}$ converge, donc $\sum_{n \geqslant N} f_n$ converge normalement. On en déduit que f est méromorphe sur $\mathbb{C}$.

On va appliquer le théorème d'holomorphie des intégrales à paramètres pour montrer que g est holomorphe. La fonction $z \mapsto e^{-t}t^{z-1}$ est holomorphe, et la fonction $t \mapsto e^{-t}t^{z-1}$ est mesurable. Soit $\tilde{K}$ un compact de $\mathbb{C}$. Alors il existe δ tel que pour tout $z \in \tilde{K}$, $\mathrm{Re}\, z \leqslant \delta$. Alors :

$$|e^{-t}t^{z-1}| \leqslant e^{-t}t^{\delta - 1} \in L^1([1, +\infty[)$$

On en déduit que g est holomorphe sur $\mathbb{C}$. Ainsi, $\Gamma = f + g$ est donc méromorphe sur $\mathbb{C}$. □

Références

[Les] Ahmed Lesfari. *Variables complexes.* Ellipses